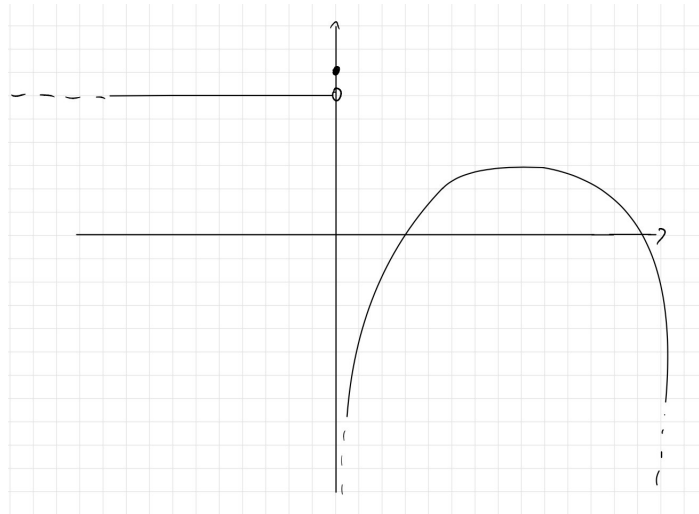


Università degli Studi Roma Tre - Ingegneria Meccanica
Esercizi di Analisi Matematica I
A.A. 2022/23

- Esercitazione 2 -

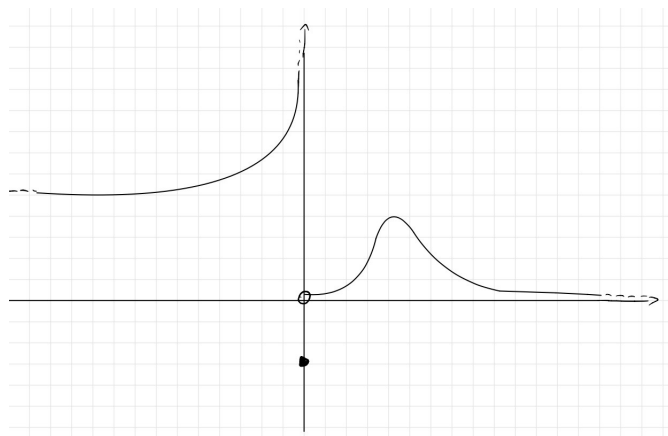
Esercizi sulle funzioni.

(1) Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è rappresentato in figura.



- Determinare il dominio e l'immagine di f .
- Determinare l'insieme degli x tali che $f(x) > 3$.
- Determinare le seguenti immagini di intervalli: $f([0, 2]) = \dots$, $f((4, +\infty)) = \dots$
- Determinare la controimmagine tramite f di $\{6\}$.
- Quali delle seguenti affermazioni è vera?
 - a) la funzione f è suriettiva sul suo dominio.
 - b) la funzione f è iniettiva su $(0, 3)$.
 - c) la funzione f è iniettiva su $(-3, 0)$.
 - d) la funzione f è decrescente in $[8, +\infty)$.

(2) Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è rappresentato in figura.



- Determinare il dominio e l'immagine di f .
- Determinare l'insieme degli x tali che $f(x) \leq 4$.
- Determinare le seguenti immagini: $f([-2, 2]) = \dots$, $f((0, +\infty)) = \dots$
- Determinare le contro-immagini $f^{-1}((5, +\infty))$ e $f^{-1}([4, 5])$.
- Quali delle seguenti affermazioni è vera?
 - a) la funzione f è iniettiva sul suo dominio.
 - b) la funzione f è iniettiva su $[5, +\infty)$.
 - c) la funzione f è biiettiva.
 - d) la funzione f è crescente in $(0, 4)$.

(3) Dire quali delle seguenti funzioni sono (strettamente) monotone negli insiemi A e $\text{dom} f$:

$$(i) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}, A = [2, +\infty); \quad (ii) f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^4, A = [1, +\infty).$$

Solutions: (i) $\text{dom} f = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$. È strettamente crescente in $[2, +\infty)$. (ii) $\text{dom} f = \mathbb{R}$. È strettamente crescente in $[1, +\infty)$.

Esercizi su max, min, sup e inf.

(1) Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} sono limitati (inferiormente o superiormente) e determinare, se esistono, i loro massimi, minimi, estremi superiori e inferiori:

$$(i) A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 2} \leq x + 3\}; \quad (ii) B = \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{2n+5}} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$(iii) C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt[4]{2 - |3x|} > \frac{1}{2} \right\}, \quad (iv) D = \{x \in \mathbb{R} : ||2x - 1| - x| < 1\}.$$

Solutions: (i) $A = [-\frac{1}{2}, +\infty)$, (ii) $\min B = \sqrt{4/5}$, $\sup B = 1$. (iii) $C = (-\frac{7}{12}, \frac{7}{12})$, (iv) $D = (0, 2)$.

Esercizi teorici su immagine, controimmagine, iniettività, suriettività

(1) Sia $f : X \rightarrow Y$. Verificare che

(a) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A, \quad \forall A \subseteq X$

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B, \quad \forall B \subseteq Y;$

(2) Dimostrare che $f : X \rightarrow Y$ è iniettiva se e solo se $f^{-1}(f(A)) = A$ per ogni $A \subseteq X$.

(3) Dimostrare che $f : X \rightarrow Y$ è suriettiva se e solo se $f(f^{-1}(B)) = B$ per ogni $B \subseteq Y$.

Disequazioni

- $(3 \tan^2 x - 2) \tan^2 x < 1$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- $4 \sin x \cos x + 1 < 0$ per $x \in [-\pi, \pi]$;
- $\cos x (2 \cos^2 x + \sin x - 2) \geq 0$.
- $12(\arctan x)^2 - 7\pi \arctan x + \pi^2 > 0$.